MINISTERE DE L'ENVIRONNEMENT
ET DU CADRE DE VIE

10

DEUXIEME COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

- OPTION M -

(temps accordé : 4 heures)

PRELIMINAIRE : Ce problème a pour objet l'étude de la notion d'encombrement d'ensembles dans le plan. En raison du caractère géométrique des notions et des exemples, il y aura avantage à faire des figures ; mais la rigueur des démonstrations ne devra pas être négligée pour autant.

Les parties II, III, IV sont indépendantes.

Partie I

L'objet de cette partie est de définir la notion d'encombrement et d'en dégager quelques propriétés fondamentales.

On appelle $\mathcal{E}$ le plan $\mathbb{R}^2$ muni de la distance d associée à une norme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$.

Si F et F' sont deux parties non vides de $\mathcal{E}$, on note

$$d(F,F') = \inf_{M \in F,\ M' \in F'} d(M,M').$$

On note $B(M,r)$ la boule fermée de centre $M \in \mathcal{E}$ et de rayon $r \in \mathbb{R}^{+*}$, c'est à dire $B(M,r) = \{N \in \mathcal{E} / d(M,N) < r\}$.

On notera d_0 la distance euclidienne et d_1 la distance associée à la norme $\| \ \|_\infty$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ telle que $\| (x,y) \|_\infty = \sup \{|x|, |y|\}$

1) a) Soit E une partie non vide et bornée de $\mathcal{E}$. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$.
Montrer que l'on peut recouvrir E par un nombre fini de boules fermées de rayon $\frac{\varepsilon}{2}$. Constater l'existence de $N_E(\varepsilon)$, si $N_E(\varepsilon)$ désigne le plus petit nombre de boules fermées de rayon $\frac{\varepsilon}{2}$ dont la réunion recouvre E.

b) Montrer que si $(\varepsilon,\varepsilon') \in (\mathbb{R}^{*})^2$ est tel que $\varepsilon < \varepsilon'$, on a $N_E(\varepsilon') \leqslant N_E(\varepsilon)$

.../...

c) Si E' est une partie non vide de E, montrer que

$$N_{E'}(\varepsilon) \leqslant N_E(\varepsilon)$$

d) Soient $G_1, G_2, \ldots G_n$ n ensembles bornés non vides vérifiant $d(G_i, G_j) > \varepsilon$ pour tout $(i,j) \in \{1,2,\ldots..n\}^2$ avec $i \neq j$;

Montrer que $$N_{\bigcup_{i=1}^{n} G_i}(\varepsilon) = \sum_{i=1}^{n} N_{G_i}(\varepsilon)$$

2) On dit que E possède un paramètre d'encombrement si et seulement si :

(1) $\begin{cases} E \text{ est non vide et borné} \\ \text{il existe } p \in \mathbb{R}^+ \text{ et } (A, B, \varepsilon_o) \in (\mathbb{R}^{+*})^3 \text{ tels que} \\ \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \ \varepsilon < \varepsilon_o \implies \dfrac{A}{\varepsilon^p} \leqslant N_E(\varepsilon) \leqslant \dfrac{B}{\varepsilon^p} \end{cases}$

a) Montrer que p ainsi défini est unique et ne dépend pas de la norme choisie. (On rappelle qu'en dimension finie toutes les normes sont équivalentes).

p s'appellera désormais le paramètre d'encombrement de E.

b) Montrer que si E' est déduit de E par une homothétie, E vérifiant (1), alors E' vérifie (1).

c) Montrer que si E' est <u>dense</u>** dans E (partie non vide bornée de $\mathcal{E}$), on a : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*} \ (N_{E'}(\varepsilon) = N_E(\varepsilon))$

En déduire que si E vérifie (1), E' et $\overline{E}$ (la fermeture de E) vérifient (1).

3) a) Montrer que $\{(o,o)\}$ vérifie (1).

b) Soit $\ell \in \mathbb{R}^{+*}$; on pose $E = [o,\ell] \times \{o\}$.

On prendra $d = d_1$. Rappeler la forme des boules B(M,r).

(i) Soient n couples (a_i, b_i) de réels tels que $b_i > a_i$ et $[o,\ell] \subset \bigcup_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$. On appelle f_i la fonction caractéristique de l'intervalle $[a_i, b_i]$ (c'est à dire que $f_i(x) = 1$ pour $x \in [a_i, b_i]$ et $f_i(x) = o$ sinon)

En considérant $\int_{\inf\{a_i/i=1,\ldots..n\}}^{\sup\{b_i/i=1,\ldots..n\}} \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\,dx$,

montrer que $\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) > \ell$

.../...

** Il est rappelé qu'un ensemble E est dense dans un ensemble F si tout point de F est la limite d'une suite de points de E.

(ii) Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$; Soit B une boule fermée de rayon $\frac{\varepsilon}{2}$, telle que $B \cap E \neq \emptyset$. Montrer qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $o \leqslant b - a \leqslant \varepsilon$ et $B \cap E = [a,b] \times \{o\}$.

(iii) Montrer (2) : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*} \ (\frac{\ell}{\varepsilon} \leqslant N_E(\varepsilon) \leqslant \frac{\ell}{\varepsilon} + 1)$

En déduire que E vérifie (1).

Partie II

L'objet de cette partie est d'exhiber pour tout $p \in]o,2]$ un ensemble possédant p comme paramètre d'encombrement.

On prendra $d = d_1$

Soit $k \in [3,+\infty[$. On pose

$$F_{o,k} = \{-1,o,1\}$$

$$F_{1,k} = \{-1-\frac{1}{k} \ , \ -1, \ -1+\frac{1}{k} \ , -\frac{1}{k}, \ o, \ \frac{1}{k}, \ 1-\frac{1}{k}, 1, \ 1+\frac{1}{k}\}$$

$$F_{n,k} = \{x \in \mathbb{R} \ / \exists y \in F_{n-1,k} \ (|x-y| = \frac{1}{k^n} \text{ ou } x = y)\}$$

On pose $E_k = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_{n,k}$ et $E'_k = E_k \times \{o\}$

1) a) Montrer que E_k est borné ; en donner les bornes.

b) Montrer que E'_3 est dense dans un segment de l'axe y=o
(On remarquera que $F_{n,3}$ divise l'intervalle $[\inf F_{n,3}, \sup F_{n,3}]$ en $3^{n+1} - 1$ intervalles de même longueur)

2) On pose $F'_{n,k} = F_{n,k} \times \{o\}$.

Montrer que la distance minimale entre deux points de $F'_{n,k}$ est $\frac{1}{k^n}$.

En utilisant I 1) d), en déduire que

$$N_{F'_{n,k}}\left(\frac{2}{k^{n+1}(k-1)}\right) = 3^{n+1}$$

3) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $3^n \leqslant N_{E'_k}\left(\frac{2}{k^n(k-1)}\right) \leqslant 3^{n+1}$

b) Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$; montrer que pour ε assez petit, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\frac{2}{k^{n+1}(k-1)} \leqslant \varepsilon < \frac{2}{k^n(k-1)}$$

.../...

Montrer, en posant $p = \frac{\text{Log } 3}{\text{Log } k}$, que

$$\frac{2^p}{(k-1)^p \varepsilon^p} \leqslant N_{E'_k}(\varepsilon) \leqslant 9 \frac{2^p}{(k-1)^p \varepsilon^p}$$

En déduire que E'_k vérifie (1).

4) a) On pose $E''_k = E_k \chi E_k$ et $F''_{n,k} = F_{n,k} \chi F_{n,k}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Montrer que $F''_{n,k}$ est un ensemble de 3^{2n+2} points tels que si $(M,M') \in (F''_{n,k})^2$ avec $M \neq M'$, on a $d_1(M,M') \geqslant \frac{1}{k^n}$

En déduire que $N_{F''_{n,k}}\left(\frac{2}{k^{n+1}(k-1)}\right) = 3^{2n+2}$

b) En suivant une démarche analogue à la question 3), montrer que E''_k vérifie (1), avec 2p comme paramètre d'encombrement, où 2p décrit $]0,2]$ quand k décrit $[3,+\infty[$

c) En déduire que $[-1,1] \chi [-1,1]$ possède un paramètre d'encombrement égal à 2 et que, pour tout E possèdant un paramètre d'encombrement p, on a $p \leqslant 2$.

Partie III

L'objet de cette partie est d'exhiber une partie non vide bornée de $\mathcal{E}$ qui ne possède pas de paramètre d'encombrement.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose :

$$G_n = \{\tfrac{1}{n}\} \chi \left[0,\tfrac{1}{n}\right] \quad \text{et} \quad E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} G_n$$

On prendra $d = d_1$

1) a) Soit $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}[$. Montrer qu'il existe un et un seul $m \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\frac{1}{(m+1)(m+2)} < \varepsilon < \frac{1}{m(m+1)}$$

On pose : $H_m = \bigcup_{n=1}^{m} G_n$.

Montrer que $N_{H_m}(\varepsilon) \geqslant \frac{1}{\varepsilon} \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n}$

(On utilisera I 1) d) et la proposition (2)).

.../...

b) En déduire qu'il existe $(\alpha,\varepsilon_1) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$ tel que :

$$\forall \varepsilon \in]o,\varepsilon_1[\quad \left(N_E(\varepsilon) \geqslant \alpha \frac{\operatorname{Log} \frac{1}{\varepsilon}}{\varepsilon} \right)$$

(On rappelle que : $\left(\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n} - \operatorname{Log} m \right)_{m \in \mathbb{N}^*}$ est une suite bornée.)

2) Soit $\varepsilon \in]o,1[$ et $m' \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\frac{1}{m'+1} \leqslant \varepsilon < \frac{1}{m'}$

Montrer que : $E \subset B\left(\left(\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right), \frac{\varepsilon}{2}\right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{m'} G_n \right)$

En déduire que :

$$N_E(\varepsilon) \leqslant 1 + \frac{1}{\varepsilon} \left(\sum_{n=1}^{m'} \frac{1}{n} \right) + m'$$

(On utilisera la proposition (2).)

3) En déduire que E ne possède pas de paramètre d'encombrement.

Partie IV

L'objet de cette partie est l'étude de l'encombrement de parties de $\mathcal{E}$ images par une application continue d'un intervalle de $\mathbb{R}$.

Les questions 1) et 2) sont indépendantes.

On prendra $d = d_o$.

1) Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathcal{E}$ une application de classe C^1.
On note $\mathcal{C} = f([a,b])$ que l'on suppose non réduit à un point.

a) Soit ℓ la longueur de $\mathcal{C}$. Montrer qu'il existe $\varepsilon_2 \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que :

$$\forall \varepsilon \in]o,\varepsilon_2[\quad \left(N_{\mathcal{C}}(\varepsilon) \leqslant \frac{3\ell}{\varepsilon} \right).$$

b) Montrer que l'on peut recouvrir un segment de l'un des axes d'équation $x = o$ ou $y = o$ à l'aide de la projection sur cet axe (notée ϕ) d'un recouvrement de $\mathcal{C}$. (On utilisera la continuité de $\phi \circ f$).

c) En déduire que $\mathcal{C}$ vérifie (1).

2) On utilisera le résultat du II 4) c) : $[-1,1] \times [-1,1]$ possède un paramètre d'encombrement égal à 2.

Soit $A \notin \mathbb{Q}$, $A > 0$.

On pose $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{E}$

$t \longrightarrow (\sin t, \sin At)$

On pose $E = g(\mathbb{R})$.

a) Montrer la densité de E dans $[-1,1] \times [-1,1]$ de la façon suivante :

(i) On pose : pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = nA - \text{Ent}(nA)$, où pour tout $x \in \mathbb{R}$, Ent (x) désigne la partie entière de x.

Montrer que les $u_n \in [0,1[$ sont tous distincts.

En déduire qu'il existe, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n_1 \leqslant n$ et $n_2 \leqslant n$ tels que $0 < u_{n_1} - u_{n_2} \leqslant \frac{1}{n}$.

(ii) En déduire la densité dans $\mathbb{R}$ de l'ensemble $\{p+qA \ / \ (p,q) \in \mathbb{Z}^2\}$, puis la densité dans $[-1,1]$ de $\{\sin (At_0 + (p+qA)\, 2\pi) \ / \ (p,q) \in \mathbb{Z}^2\}$ pour $t_0 \in \mathbb{R}$ fixé.

(iii) En déduire le résultat, en approchant $(x,y) \in [-1,1] \times [-1,1]$ par $(\sin (t_0 + q2\pi), \sin (A (t_0 + q2\pi)))$ où $t_0 = \text{Arc sin } x$.

b) En déduire que E possède un paramètre d'encombrement.

---

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail